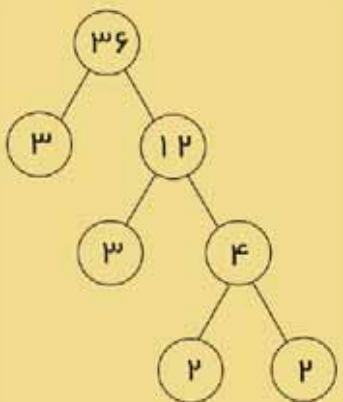




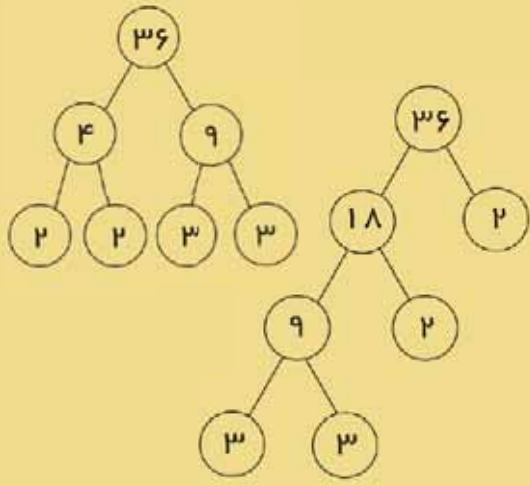
از سال هفتم با «نمودار تجزیه» آشنا شده‌اید. برای کشیدن نمودار تجزیه، عدد اصلی (عددی که می‌خواهیم تجزیه کنیم) را می‌نویسیم و دو شاخه به سمت پایین می‌کشیم و زیر این دو شاخه دو عدد غیر از ۱ می‌نویسیم که حاصل ضرب آن‌ها برابر با عدد اصلی باشد. اگر عددی که می‌نویسیم مرکب باشند، همین کار را برای هر کدام از آن دو تکرار می‌کنیم و... بله! فرایند بالا را تا جایی که امکان پذیر باشد ادامه می‌دهیم.



شما با کدام یک از جمله‌های زیر موافقید؟

- هر کدام از عددهای موجود در نمودار تجزیه، شمارنده‌ای از عدد بالایی آن است.
- اگر پایین‌ترین عدد همه شاخه‌ها را در هم ضرب کنیم، عدد اصلی به دست می‌آید.
- برای یک عدد ممکن است چند نمودار تجزیه متفاوت بتوانیم بکشیم.

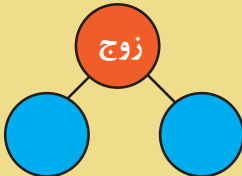
این جمله‌ها ویژگی‌های نمودارهای تجزیه را بیان می‌کنند. احتمالاً شما می‌توانید در ذهنتان دلیل درست بودن این جمله‌ها را مرور کنید.
«برای یک عدد ممکن است چند نمودار تجزیه متفاوت بتوانیم بکشیم.»
می‌دانیم که جمله بالا درست است.
یک بار دیگر به نمودارهایی که برای ۳۶ کشیده‌ایم، نگاه کنید. پایین‌ترین دایره‌های هر سه نمودار ۲ و ۲ و ۳ و ۳ هستند. حتماً شما هم قبول دارید که این ماجرا اتفاقی نیست. چطور می‌شود که شکل نمودارهای این قدر با هم فرق می‌کند، ولی در نهایت همه آن‌ها به اعداد اول یکسانی می‌رسند؟ در این متن تلاش می‌کنیم که روی این موضوع متمرکز باشیم. شاید به دستاوردهایی برسیم...





«بالایی‌ها» در مورد «پایینی‌ها» چه می‌گویند؟

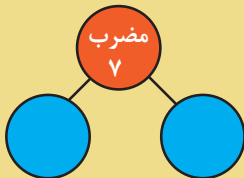
یک نفر نمودار یک عدد را کشیده، ولی متأسفانه بعضی از قسمت‌های آن پاک شده است. او فقط به ما می‌گوید که عدد اصلی زوج بوده است. بیا ببینیم حدس‌هایی در مورد عددهای پایینی بزنیم:



- دایره‌های آبی شاید ۲ و ۵ باشند.
- دایره‌های آبی شاید ۷ و ۲ باشند.
- خیلی حالت‌های دیگر هم ممکن است باشند.
- اما امکان ندارد دایره‌های آبی ۳ و ۵ باشند، چون...

اگر دایره‌های پایینی ۳ و ۵ بودند که عدد اصلی ما زوج نمی‌شد! در نمودارهای مثل این، وقتی بدانیم که عدد اصلی ما زوج است، نمی‌توانیم با قطعیت عددهای پایینی را پیدا کنیم، اما می‌توانیم مطمئن باشیم که «لااقل یکی از پایینی‌ها ۲ است.»

در این نمودار، ما می‌دانیم که عدد اصلی مضرب ۷ است. ببینیم چه حرف‌هایی در مورد پایینی‌ها می‌توانیم بزنیم؟



- دایره‌های آبی شاید ۷ و ۳ باشند.
- دایره‌های آبی شاید ۷ و ۱۱ باشند.
- خیلی حالت‌های دیگر هم ممکن است باشند.
- اما امکان ندارد دایره‌های آبی ۵ و ۳ باشند، چون...

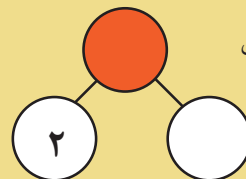
اگر دایره‌های آبی ۳ و ۵ بودند، چطور ممکن بود عدد اصلی ما مضرب ۷ باشد؟

در نموداری مثل این، وقتی بدانیم که عدد اصلی ما مضرب ۷ است، نمی‌توانیم با قطعیت عددهای پایینی را پیدا کنیم، اما می‌توانیم مطمئن باشیم که: «لااقل یکی از پایینی‌ها ۷ است.»

آیا تجزیه‌های بالا کافی هستند که نتیجه بگیریم:

«یک نمودار تجزیه ممکن است خیلی طولانی یا کوتاه باشد. همچنین ممکن است شکل‌های گوناگونی داشته باشد. اما اگر عدد اصلی، مضرب p باشد (p یک عدد اول است)، می‌توانیم مطمئن باشیم که p باید حداقل یک بار در پایین نمودار دیده شود.»

«پایینی‌ها» در مورد «بالایی‌ها» چه می‌گویند؟



به شکل روبه‌رو توجه کنید. می‌دانیم که کسی نمودار تجزیه‌ای کشیده، ولی متأسفانه بعضی از قسمت‌های آن پاک شده است. حدس می‌زنید عدد اصلی (عدد مربوط به دایره قرمز) چند بوده؟

- دایره قرمز شاید ۴ باشد.
- دایره قرمز شاید ۶ باشد.
- دایره قرمز شاید ۱۴ باشد.
- خیلی حالت‌های دیگر هم ممکن است باشد.
- اما دایره قرمز ممکن نیست ۱۵ باشد، چون...

چرا مطمئنیم که دایره قرمز ۱۵ نبوده است؟ وقتی یکی از پایین‌ترین عددها ۲ باشد، نمی‌توانیم دقیقاً عدد بالایی (قرمز) را پیدا کنیم. اما یک نتیجه می‌توانیم بگیریم: «عدد بالایی (قرمز) مطمئناً زوج بوده است.»

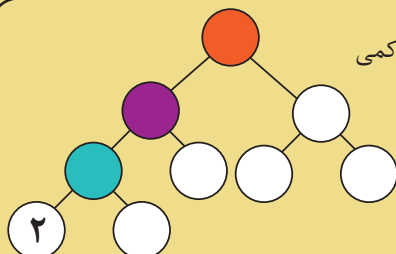
در این یکی نمودار بیا ببینیم عدد بالایی (عدد مربوط به دایره قرمز) را حدس بزنیم.



- دایره قرمز شاید ۱۴ باشد.
- دایره قرمز شاید ۲۱ باشد.
- خیلی حالت‌های دیگر هم ممکن است باشد.
- اما دایره قرمز ممکن نیست ۱۰ باشد، چون...

دایره قرمز مطمئناً ۱۰ نبوده است، چون ۱۰ بر ۷ بخش پذیر نیست!

با توجه به تجربه مثال‌های بالا، آیا با این جمله موافقت می‌کنید؟ «یک نمودار تجزیه ممکن است خیلی طولانی یا کوتاه باشد. همچنین ممکن است شکل‌های گوناگونی داشته باشد. اما اگر یکی از پایین‌ترین عددهای موجود در آن نمودار تجزیه، عدد اولی به نام p باشد، می‌توانیم مطمئن باشیم که عدد اصلی، مضرب p است.»



و اما این نمودار کمی سخت‌تر است.

آیا اینجا هم حرفی شبیه دو مورد قبلی می‌توانیم بزنیم؟

- دایره سبز، بالای ۲ است، پس مطمئناً باید زوج باشد.
- پس دایره بنفش که یک مرحله بالاتر از دایره سبز است هم باید زوج باشد.
- پس دایره قرمز هم باید زوج باشد.



ما به دستاوردهای ارزشمندی رسیده‌ایم!

پایید همه این دستاوردها را یکجا در یک مثال ببینیم:
با ماشین حساب، عددهای اول ۵، ۷، ۱۷ و ۲۳ را در هم ضرب کنید. حاصل ضرب برابر با ۱۳۶۸۵ می‌شود. اگر از یک نفر بخواهیم که برای عدد ۱۳۶۸۵ نمودار تجزیه بکشد، نمی‌توانیم حدس بزنیم که نمودار او چه شکلی می‌شود، اما در مورد پایین‌ترین اعداد آن خیلی حرف‌ها می‌توانیم بزنیم:

- ۱۳۶۸۵ ضربی از ۷ است، پس مطمئنیم که در میان پایین‌ترین اعداد، حداقل یک بار ۷ دیده می‌شود.
- ۱۳۶۸۵ ضربی از ۵ است، پس مطمئنیم که در میان پایین‌ترین اعداد، حداقل یک بار ۵ دیده می‌شود.
- ۱۳۶۸۵ ضربی از ۲۳ است، پس مطمئنیم که در میان پایین‌ترین اعداد، حداقل یک بار ۲۳ دیده می‌شود.

همچنین:

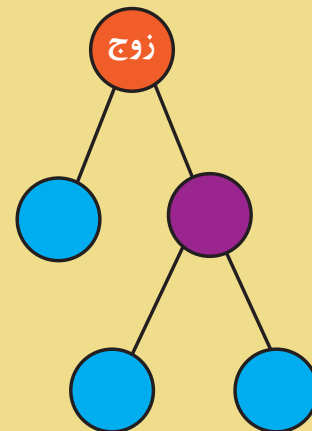
- مطمئنیم که در پایین‌ترین اعداد آن نمودار، ۲ دیده نخواهد شد چون ۱۳۶۸۵ مضرب ۲ نیست.
- مطمئنیم که در پایین‌ترین اعداد آن نمودار، ۳ دیده نخواهد شد چون ۱۳۶۸۵ مضرب ۳ نیست.
- مطمئنیم که در پایین‌ترین اعداد آن نمودار، ۱۱ دیده نخواهد شد چون ۱۳۶۸۵ مضرب ۱۱ نیست.

مطمئنیم که در پایین‌ترین اعداد آن نمودار، هیچ عدد دیگری به جز ۵، ۷، ۱۷ و ۲۳ دیده نخواهد شد، چون ۱۳۶۸۵ مضرب هیچ عدد اول دیگری غیر از ۵، ۷، ۱۷ و ۲۳ نیست. پس اگر از یک نفر بخواهیم که نمودار ۱۳۶۸۵ را بکشد، اصلاً نمی‌توانیم حدس بزنیم نمودارش چه شکلی خواهد بود، ولی مطمئنیم که پایین‌ترین عددهایی که می‌نویسد، فقط و فقط از بین اعداد ۵ و ۷ و ۱۷ و ۲۳ خواهد بود؛ نه یک عدد بیشتر نه یک عدد کمتر. اگر نمودار ۱۹۱۵۹ را بکشید، خواهید دید که عدد ۷ دوبار ظاهر می‌شود. در این نوشته در مورد تعداد دفعاتی که یک عدد اول ظاهر می‌شود، صحبتی نشده است. در این مورد، کمی فکر کنید! به دستاوردهای جالبی می‌رسید!

مبادا دچار اشتباه شویم!

بسیاری از خصوصیت‌های عددهای مرکب با عددهای اول فرق دارند. اگر دایره بالایی مضربی از یک عدد مرکب باشد، ماجرا تفاوت خواهد داشت. مثلاً اگر عدد اصلی مضرب ۶ باشد، امکان ندارد که ۶ را در پایین‌ترین دایره‌ها ببینیم. اصلاً ۶ در پایین‌ترین دایره‌ها نمی‌تواند قرار بگیرد. پایین‌ترین دایره‌ها مخصوص اعداد اول هستند.

و باز هم برویم سراغ نمودارهای سخت‌تر!



تصور کنید چنین نموداری داریم و تنها چیزی که می‌دانیم این است که عدد اصلی زوج است. استدلالی شبیه به دو مثال قبل اینجا هم ما را به جواب می‌رساند:

- به دایره‌های آبی نگاه کنید. اگر همه آن‌ها فرد باشند، حتماً دایره‌های بنفش و قرمز هم باید فرد باشند.
- پس حداقل یکی از دایره‌های آبی باید ۲ باشد.
- یک بار دیگر توجه کنید که چه نتیجه‌ای گرفتیم:
«در یک نمودار تجزیه، اگر عدد اصلی زوج باشد، مطمئنیم که لااقل یکی از پایین‌ترین عددها ۲ بوده است.»

ریاضی کارها چطور فکر می‌کنند

حتماً می‌دانید که ریاضی کارهای حرفه‌ای، با نکته‌سنجی زیادی به جزئیات استدلال گوش می‌کنند و قبل از پذیرفتن یک حرف، همه جوانب را بررسی می‌کنند که مبادا در مراحل کار چیزی از قلم بیفتد. اگر شما دستاوردهای این متن را برای یک ریاضی کار توضیح دهید، احتمالاً او به خوبی متوجه ارزشمندی حرف‌های شما خواهد شد اما شاید به شما بگوید: «خیلی خوب است اما این هنوز یک اثبات دقیق نیست!» خیلی تعجب نکنید. شما همه چیز را درست متوجه شده‌اید. مشکل از استانداردهاست. ما می‌توانیم به درستی دستاوردهایمان باور داشته باشیم و از آن‌ها استفاده کنیم، اما با استانداردهای ریاضیات حرفه‌ای، هنوز حرف‌ها و استدلال‌هایمان باید دقیق‌تر شوند.